Απειροστικός Λογισμός ΙΙ, 4ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1) Να βρεθεί το πολυώνυμο Taylor τάξης 3, γύρω από το μηδέν, της συνάρτησης με τύπο $f(x) = e^{\sin x}$.

2) Υπολογίστε τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int\limits_0^{+\infty} te^{-t}dt$ και $\int\limits_0^{+\infty} t^2e^{-t}dt$.

3) Έστω $f, g : [a, \beta] \to \mathbb{R}$ δυο συνεχείς συναρτήσεις ώστε $\int\limits_a^\beta f(x)dx = \int\limits_a^\beta g(x)dx$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [a, \beta]$ ώστε $f(x_0) = g(x_0)$.

4) Έστω $f : [a, \beta] \to \mathbb{R}$ μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση με $\int\limits_a^\beta f(x)dx \neq 0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ ώστε $\int\limits_a^\xi f(x)dx = \int\limits_\xi^\beta f(x)dx$. [Υπόδειξη: Χρησημοποιήστε, για κατάλληλη συνάρτηση, το Θεώρημα Bolzano].

5) Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [0, 1]$ ώστε $\int\limits_0^1 x^4 f(x)dx = \frac{f(\xi)}{5}$. [Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα Μέσης τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού.]

6) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \int\limits_0^x \cos(t^2)dt$.

(α) Να δείξετε ότι η f παραγωγίσιμη. Ποιο θεώρημα χρησιμοποιήσατε;
(β) Για καθεμιά από τις συναρτήσεις f και f', να εξετάσετε αν είναι ομοιόμορφα συνεχής.
(γ) Να βρείτε το πολυώνυμο Taylor τάξης 5 της f γύρω από το σημείο $x_0 = 0$.

7) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και $g_1, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $\phi(x) = \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t)dt$. Να δείξετε ότι η ϕ είναι παραγωγίσιμη και να υπολογίσετε την παραγωγό της.

8) Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^4} \int_0^{x^2} e^t \sin t dt.$$

[Υπόδειξη: Μην υπολογίσετε το ολοκλήρωμα. Χρησιμοποιήστε τον Κανόνα De L' Hospital.]

9) Η συνάρτηση $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής. Ορίζουμε τη συνάρτηση F με τύπο

$$F(x) = \int_1^x f\left(\frac{x}{t}\right) dt.$$

Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης F. [Υπόδειξη: Να κάνετε αρχικά κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής στο ολοκλήρωμα.]

10) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_0^x f(u)(x-u)du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)dt \right) du.$$